Izvestia VUZov SSSR, Radioelectronica

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ МВ и ССО СССР РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ТОМ 27 № 10
Vol 27, #10

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК (copy)

"An algorithm of the two-dimensional Fourier transform" →

КИЕВ — 1984 – Kiev

УДК 517.443

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

ГРИГОРЯН А. М.

Предложен новый алгоритм вычисления двумерного преобразования Фурье, с помощью построения соответствующего тензора третьего ранга. Показано, что такой алгоритм требует выполнения операций умножения в 1,6—2 раза меньше, чем известные алгоритмы и не требует наличия рабочей памяти для хранения промежуточных результатов вычислений.

Рассмотрим произвольный массив $\{f_{n,k}\}$ дискретного сигнала, размеры которого для простоты изложения будем считать равными, т. е. $n, k=1—N$ для некоторого целого числа N.

Преобразование Фурье исходного сигнала с точностью до нормировочного множителя есть в каждой точке (p, s) спектра

$$F_{p,s}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} f_{n,k}W^{np+ks}, \tag{1}$$

где $W=W_N=\exp(2\pi i/N)$.

Для произвольных $p, s, t=1-N$ определим множества

$$V_{p,s,t}=\{(n, k);\ n, k=1-N,\ np+ks=t\,(\mathrm{mod}\,N)\} \tag{2}$$

и пусть

$$f_{p,s,t}=\sum_{V_{p,s,t}} f_{n,k}. \tag{3}$$

Тогда, в силу (2) и (3), в произвольной точке (p, s) спектра получаем

$$F_{p,s}=\sum_{t=1}^{N} f_{p,s,t}W^{t}. \tag{4}$$

Таким образом, строя тензор 3-го ранга $\{f_{p,s,t};\ p, s, t=1-N\}$ по (3), представляем спектр сигнала в каждом отсчете (p, s) в виде $F_{p,s}=(f_{p,s,1}, f_{p,s,2}, \ldots, f_{p,s,N})$.

Такое тензорное представление спектра взаимно-однозначно и характеризуется следующим свойством. Если, для произвольного целого l обозначить $\bar{l}=l\,(\mathrm{mod}\,N)$, тогда для любых целых p, s и k

$$F_{\overline{kp},\overline{ks}}=\sum_{t=1}^{N} f_{p,s,t}W^{tk}. \tag{5}$$

Действительно, в силу определений (2) и (3), а также свойства периодичности дискретного преобразования Фурье имеем

$$\sum_{t=1}^{N} f_{p,s,t}W^{tk}=\sum_{t=1}^{N}\Big(\sum_{V_{p,s,t}} f_{n,m}\Big)W^{tk}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} f_{n,m}W^{(np+ms)k}=F_{kp,ks}=F_{\overline{kp},\overline{ks}},$$

так как для произвольно фиксированных p, s, множества $V_{p,s,t}$ разбивают область определения спектра $X_N=\{(n, m);\ n, m=1-N\}$ так, что $X_N=\bigcup_{t=1}^{N} V_{p,s,t}$ и $V_{p,s,t_1}\cap V_{p,s,t_2}=\varnothing$ при $t_1\neq t_2$.

Формула (5) означает, что для фиксированных значений (p, s) по компонентам $f_{p,s,1}, \ldots, f_{p,s,N}$ тензора преобразованием Фурье можно получить спектр в точках вида $(\overline{kp}, \overline{ks})$, которые составляют циклическую группу

$T^N_{p,s}$ с образующей (p, s), т. е.

$$T^N_{p,s} = \{(\overline{kp}, \overline{ks}); \quad k = 1 - N\}. \tag{6}$$

Например, для $(p, s) = (1, 1)$ по компонентам тензора $f_{1,1,t}$ получим значения спектра сигнала в отсчетах $(1, 1)$, $(2, 2), \ldots, (N, N)$.

Пусть, например, N является некоторой степенью двойки, тогда, осуществляя процедуру быстрого преобразования Фурье (БПФ) над последовательностью $f_{p,s,1}, f_{p,s,2}, \ldots, f_{p,s,N}$, в силу (5) определим значения спектра на группе $T^N{}_{p,s}$, выполняя при этом примерно $0{,}5\, N \log_2 N$ (точное число — $0{,}5\, N(\log_2 N - 2) + 1$) операций комплексных умножения на нетривиальные поворачиваемые множители (степени экспоненты W), т. е. в среднем на каждый отсчет спектра

$$v_{p,s} = 0{,}5 N \log_2 N / \mathrm{card}\, T^N_{p,s} \tag{7}$$

операций умножения; card — означает мощность (порядок) группы.

Если p, s и N не имеют общих делителей, то $\mathrm{card} T^N{}_{p,s} = N$, поэтому в каждой точке вида $(\overline{kp}, \overline{ks})$ для таких p, s, спектр двумерного сигнала вычисляется с помощью $0{,}5 \log_2 N$ операций комплексного умножения, т. е. столько же, сколько необходимо и в случае одномерного преобразования Фурье. Необходимо отметить, что существующие алгоритмы двумерного БПФ требуют выполнения аналогичных операций в 1,5—2 раза больше [1, 2].

Для N простого справедливо аналогичное утверждение и соответствующую оценку $V_{p,s}$ можно считать равной (7), в числителе формулы которой N заменено на ближайшее число, равное степени двойки. Действительно, для таких N алгоритма БПФ не существует и поэтому, как это часто делают в большинстве практических задач, осуществляют искусственное удлинение обрабатываемой последовательности путем добавления нулей до минимальной размерности, равной степени двойки. Покажем, как использовать формулу (5) для эффективного в смысле быстродействия вычисления полного спектра двумерного сигнала.

Очевидно, что для этого необходимо оптимальным образом выбирать исходные значения (p, s) отсчетов спектра, чтобы соответствующие группы $T^N{}_{p,s}$ покрывали область X_N спектра с минимальными пересечениями. Действительно, для N, являющихся степенью 2, можно показать, что не существует такого покрытия области спектра

$$X_N = \bigcup_J T^N_{p,s}, \tag{8}$$

где J — некоторое множество в X_N, чтобы выполнялись условия независимости, т. е.

$$T^N_{p,s} \cap T^N_{p1,s1} = (N, N) \tag{9}$$

для произвольных (p, s) и (p_1, s_1) из множества J.

Для простых N такое покрытие области спектра существует, например, в качестве этого множества можно взять

$$J_p = \{(1, p),\ p = 1 - N\} \cup (N, 1)$$

или

$$J'_p = \{(p, 1),\ p = 1 - N\} \cup (1, N). \tag{10}$$

Действительно, справедлива следующая лемма.

Лемма. Если число N простое, то для любого $l \neq N$

$$X_N = \dot{\sum_{k=1}^{N}} (T^N_{k,l} \setminus (N, N)) \dot{+} T^N_{l,N} = \dot{\sum_{k=1}^{N}} (T^N_{l,k} \setminus (N, N)) \dot{+} T^N_{N,l}, \tag{11}$$

где знаки $\dot{\Sigma}$, $\dot{+}$ обозначают объединение непересекающихся множеств.

Доказательство. Для простоты возьмем $l=1$, и пусть существуют такие k_1, k_2, $k_1 \neq k_2$, для которых $T^N_{k1,1} \cap T^N_{k2,1} \neq (N, N)$, т. е. существует $(p_0, s_0) = n_1(k_1, 1) = n_2(k_2, 1)$, что имеет место только при выполнении равенств $n_1 = n_2$ и $n_1 k_1 = n_2 k_2 \pmod N$, откуда следует что $n_1(k_1 - k_2) = 0 \pmod N$. Но, так как по предположению $n_1 \neq N$ и N простое, последнее равенство при $k_1 \neq k_2$ выполняться не может. Аналогично доказывается, что для любого целого $k \in [1, N]$ имеем $T^N_{k,1} \cap T^N_{1,N} = (N, N)$.

Далее, так как все множества $T^N_{k,1} \setminus (N, N)$ и $T^N_{1,N}$ входят в X_N и имеют вместе мощность, равную $N(N-1)+N = N^2 = \operatorname{card} X_N$, то отсюда следует справедливость разложения (11). Лемма доказана.

Таким образом, существование оптимального покрытия X_N области спектра для N простых доказано. Аналогичными рассуждениями доказывается, что для N, равных степеням двойки, оптимального покрытия в смысле (8) и (9) области X_N спектра не существует.

Поэтому, как уже указывалось, для N, являющихся степенями 2, в покрытии (8) необходимо выбирать такие образующие (p, s), соответствующие группы которых пересекались бы минимально в совокупности. Можно доказать, что для таких N достаточно взять множество в (8), равное

$$J_r = \{(l, p),\ p = 1 - N\} \cup \{(2k, l),\quad k = 1 - N/2\}$$

или

$$J'_r = \{(p, l),\ p = 1 - N\} \cup \{(l, 2k),\quad k = 1 - N/2\}, \tag{12}$$

мощность которых $\operatorname{card} J_r = \operatorname{card} J'_r = 3N/2$ (l — простое).

Таким образом, в силу (5), (8), (12) и (10), получаем, что спектр исходного двумерного сигнала можно полностью определить с помощью $3N/2$ одномерных процедур преобразования Фурье, для N, равных степени двойки, а для простых N таких процедур достаточно выполнить $(N+1)$ раза.

Существующие же способы вычисления двумерного преобразования Фурье, основанные на разложимости преобразования, выполняют $2N$ аналогичных процедур [3]. Поэтому с точки зрения вычисления на ЭВМ предлагаемый тензорный способ вычисления ДПФ дает выигрыш в сравнении с существующими двумерными БПФ по числу используемых процедур одномерных ПФ, равный для N, являющихся степенями двойки и простому числу, соответственно:

$$\gamma^r_N = 2N/(3N/2) = 4/3 \text{ и } \gamma^p_N = 2N/(N+1), \tag{13}$$

откуда видно, что при N простом в предлагаемом способе число нетривиальных комплексных умножений, необходимых для вычисления полного спектра, почти в два раза меньше, чем в существующих способах ДПФ, а при N, равном степени двойки, соответственно в 4/3 раза.

При этом, если для N простых такая оценка соотношения в (13) точна, то для N, равных степени двойки, число комплексных операций умножения можно уменьшить еще следующим образом: рассмотрим группы, покрывающие область спектра,

$$T^N_{l,1},\ T^N_{l,2}, \ldots, T^N_{l,N},\ T^N_{2,l},\ T^N_{4,l}, \ldots, T^N_{N,l}, \tag{14}$$

при $N = 2^r$, где r некоторое целое, а l — произвольное простое. Легко показать, что для всех $p = 1 - N$ имеет место

$$T^N_{l,p} \cap T^N_{l,p+N/2^k} = \{(n, m);\ \exists k_1,\ \ n = 2^k k_1 l,\ m = 2^k k_1 p\}, \tag{15}$$

т. е. пересечение этих групп есть подгруппа, которая состоит из всех элементов с координатами, кратными 2^k. Действительно, для произвольного

целого k_1 имеем $(\overline{2^k k_1 l},\ \overline{2^k k_1 p}) = (\overline{2^k k_1 l},\ \overline{2^k k_1 (p + N/2^k)})$ и наоборот, если для некоторых k и k_1 имеем $(\overline{k_2 l},\ \overline{k_2 p}) = (\overline{k_1 l},\ \overline{k_1 (p + N/2^k)})$, тогда должны выполняться условия: $(k_2 - k_1)\, l = 0 \pmod N$, $(k_2 - k_1)\, p = k_1 N/2^k \pmod N$, но так как l простое, N — степень двойки, из первого равенства следует, что $k_1 = k_2$, а из второго, что k_1 — число, кратное 2^k.

Таким образом, равенство (15) доказано. Обозначим через $T_{l,k}^{N,m}$ для любого k и $m = 1 - r$ множество

$$T_{l,k}^{N,m} = T_{l,k}^{N} \setminus (T_{l,k}^{N} \cap T_{l,k+N/2^m}^{N}). \tag{16}$$

Рассмотрим сначала множества $T_{l,k}^{N,1}$, т. е. случай $m = 1$. Тогда в силу (12) и (15) получаем, что

$$X_N = \bigcup_{k=1}^{N/2} (T_{l,k}^{N} \cup T_{l,k+N/2}^{N,1}) \bigcup_{m=1}^{N/4} (T_{2m,l}^{N} \cup T_{2m+N/2,l}^{N,1}), \tag{17}$$

при этом очевидно, что $\operatorname{card} T_{l,k}^{N,m} = (1 - 1/2^m) \operatorname{card} T_{l,k}^{N}$.

Множества $T_{l,k}^{N,1}$, для $k = 1 - N$, состоят из всех нечетных элементов группы $T_{l,k}^{N}$ и имеют мощность $\operatorname{card} T_{l,k1}^{N,1} = 0{,}5N$.

В [3] описаны алгоритмы БПФ с прореживанием по частоте, которые после первой итерации, когда N-мерное преобразование разбивается на два $N/2$-мерных преобразования Фурье, определяют все значения спектра с нечетными и четными координатами отдельно. Поэтому, используя такие алгоритмы БПФ при вычислении двумерного спектра по формуле (5), можно определить значения спектра в таких множествах $T_{l,k}^{N,1}$, выполняя при этом операции комплексных умножения в два раза меньше, чем для соответствующих групп $T^{N}{}_{l,k}$.

Итак, в силу выбранного покрытия (17), получаем, что число операций комплексного умножения, достаточных для вычисления двумерного преобразования Фурье тензорным способом, не больше числа

$$v_1 = N/2 v_0 + N/2\ 1/2 v_0 + N/4 v_0 + N/4\ 1/2 v_0 = 9/8 N v_0, \tag{18}$$

где v_0 — число операций умножения на нетривиальные поворачиваемые множители, необходимые для одномерного БПФ с прореживанием по частоте, равное, как уже упоминалось выше,

$$v_0 = N/2 (\log_2 N - 2) + 1. \tag{19}$$

Поэтому, подставляя (19) в (18), имеем: $v_1 < 9/16 N^2 (\log_2 N - 2)$.

Продолжая аналогичные рассуждения, с помощью (15) можно исключить пересечения и в группах $T_{l,k}^{N}$, где $k = 1 - N/2$, и $T_{m,l}^{N}$, где $m = 1 - N/2 - 1$.

Например, на следующем шаге, при $m = 2$, получим разложение

$$X_N = \bigcup_{k=1}^{N/4} (T_{l,k}^{N} \cup T_{l,k+N/4}^{N,2}) \bigcup_{k=1}^{N/2} T_{l,k+N/2}^{N,1} \cup,$$

$$\bigcup_{m=1}^{N/4} T_{2m+N/2,l}^{N,1} \bigcup_{m=1}^{N/8} (T_{2m,l}^{N} \cup T_{2m+N/4,l}^{N,2}), \tag{20}$$

при этом, в силу (15) $\operatorname{card} T_{l,k}^{N,2} = 3N/4$.

Как и в случае $m = 1$, если спектр сигнала определен в группе $T_{l,k}^{N,1}$, то для вычисления его в множестве $T_{l,k}^{N,2}$ достаточно на второй итерации алгоритма БПФ с прореживанием по частоте, после того как два $N/2$-мерных преобразования Фурье разбиваются на четыре $N/4$-мерных преобразования, использовать только первые три $N/4$-мерных процедур Фурье. По-

этому, для определения спектра в $T_{l,k}^{N,2}$ достаточно выполнить операций комплексного умножения в 4/3 раза меньше, чем для соответствующего $T_{l,k}^{N,1}$.

Таким образом, в силу (20) на втором этапе улучшения, когда $m=2$, число операций умножения для вычисления ДПФ тензорным способом будет не больше числа

$$v_2 = N/4v_0 + N/4\ 3/4v_0 + N/2\ 0{,}5v_0 + N/8\ v_0 + N/8\ 3/4v_0 + N/4\ 0{,}5v_0 = 33/32Nv_0.$$

Аналогично на третьем этапе, при $m=3$, получаем соответствующее число $v_3=129/128\,Nv_0$ и т. д., если продолжить при $m=4, 5, \ldots, r$, для больших N получим, что число необходимых операций умножения на поворачиваемые множители указанным алгоритмом хорошо аппроксимируется сверху числом $v=v_r=(N+1)/NNv_0=(N+1)v_0$.

Так как известные способы двумерного БПФ, использующие свойства разложения двумерного преобразования, выполняют $2N$ процедур одномерного БПФ, количество необходимых операций умножения для них равно $\bar{v}=2Nv_0$.

Отсюда вытекает, что предлагаемый алгоритм вычисления ДПФ по количеству необходимых операций умножения эффективнее указанных алгоритмов в χ_N раз, где $\chi_N=2N/(N+1)$, поэтому для больших значений N имеем $\chi_N \approx 2$.

Если сравнивать предлагаемый алгоритм ДПФ с известным алгоритмом двумерного БПФ, использующего двумерную «бабочку», которая аналогична операции одномерной «бабочки» (см. например [1]), число операций умножения для которого, как это легко показать, равно $v'=0{,}25N^2(3\log_2 N-4)+1$, то соответствующий коэффициент эффективности по количеству указанных операций будет:

$$\chi'_N = \frac{v'}{v} = \frac{1}{4}\,\frac{N^2(3\log_2 N-4)+1}{(N+1)(N/2(\log_2 N-2)+1)},$$

откуда получаем, что $\chi_N'>1{,}6$ для больших N, например, при значениях N, равных 128 и 1024, имеем $\chi'_{128}>1{,}68$ и $\chi'_{1024}>1{,}62$.

Таким образом, предлагаемый тензорный алгоритм вычисления двумерного преобразования Фурье по количеству необходимых операций комплексного умножения эффективнее всех известных алгоритмов БПФ в 1,6—2 раза. Следует также отметить, что если в одномерных БПФ в среднем на каждый отсчет спектра приходится $w_0=v_0/N$ операций умножения, то в тензорном алгоритме ДПФ в среднем на отсчет приходится $w_1=v/N^2$ аналогичных операций, т. е. $w_1=(N+1)/N^2v_0=(N+1)/Nw_0$, откуда следует, что $w_1>w_0$ и для больших значений N имеем $w_1\approx w_0$.

Таким образом, на каждый отсчет спектра в предлагаемом алгоритме вычисления ДПФ операций умножения приходится почти столько же, сколько и в любом алгоритме одномерного преобразования Фурье при любых больших размерах сигнала — $N\times N$, где N — степень 2.

Но, так как для любых простых N в тензорном способе ДПФ достаточно выполнить $(N+1)$ процедур одномерного N-точечного преобразования Фурье, то и в этом случае в среднем на каждый отсчет спектра приходится умножений

$$\tilde{w}_1 = (N+1)\,\tilde{v}_0/N^2 = (N+1)/N\tilde{w}_0, \tag{21}$$

где через $\tilde{v}_0$ обозначено число операций умножения, необходимых при выполнении N-точечного ПФ, а $\tilde{w}_0=\tilde{v}_0/N$. Как уже отмечалось, $\tilde{v}_0$ можно считать равной оценке (19) для соответствующей, близкой к простому N, размерности, являющейся степенью двойки. При этом

оценка (21) в силу леммы о покрытии области спектра не улучшаема и поэтому минимальна.

По сравнению с существующими алгоритмами двумерного БПФ предлагаемый алгоритм вычисления эффективнее и по объему необходимой рабочей памяти. Действительно, в известных алгоритмах БПФ двумерного сигнала необходимо иметь дополнительную рабочую память для постоянного хранения результатов промежуточных вычислений в течение всего процесса вычислений. Причем объем такой памяти превышает в несколько раз объем исходного сигнала, что существенно ограничивает возможности использования алгоритмов двумерного БПФ при больших размерах сигнала. В предлагаемом же тензорном алгоритме такой дополнительной памяти не требуется, так как значения спектра в каждой группе отсчетов вычисляются сразу после определения соответствующих компонент тензора.

Таким образом, существующие способы вычисления двумерного преобразования Фурье по основным характеристикам уступают тензорному. Далее, несмотря на то, что размеры двумерного сигнала предполагались равными, тензорный способ вычисления спектра легко распространить и на общий случай. При этом аналогичные рассуждения могут быть перенесены и на случай n-мерного преобразования Фурье, где $n>2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Середа Л. А. Алгоритм быстрого вычисления двумерного дискретного преобразования Фурье.— Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1983, т. 26, № 7, с. 18—22.

2. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов / Пер. с англ.— М. : Сов. радио, 1973.—367 с.

3. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений.— М. : Сов. радио, 1979.—312 с.

Поступила в редакцию после переработки 31.01.84.

РЕФЕРАТ ДЕПОНИРОВАННОЙ РУКОПИСИ

УДК 534.232

Применение численного метода синтеза согласующей цепи при согласовании генератора с акустооптической нагрузкой. **Китаев Ю. И., Константинов М. Б.** Редкол. журн. Изв. вузов МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника, Киев, 1984, 6 с., ил. Библиогр. (4 назв.). Рукопись деп. в ВИНИТИ 11.05.84, № 3006-84 деп.

Предложена методика численного расчета четырехполюсника, согласующего генератор с акустооптической нагрузкой, электрические параметры которой заданы в виде теоретически или экспериментально полученных таблиц значений амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристик. Согласующий четырехполюсник состоит из набора типовых звеньев типа лестничного фильтра, последовательная ветвь которого может содержать индуктивность или отрезок длинной линии или их сочетание, а параллельная ветвь — емкость или индуктивность или их сочетание. Такая структура звеньев позволяет учесть имеющиеся в реальных электрических цепях паразитные индуктивности входящих в состав звена элементов. Параметры элементов согласующего четырехполюсника определяются с помощью модифицированного градиентного алгоритма оптимизации, позволяющего учесть ограничения на эти параметры, связанные с физической реализуемостью согласующей цепи.

Полученные в результате решения задачи оптимизации параметры согласующего четырехполюсника обеспечивают достижение максимального значения целевой функции, в качестве которой выбрано минимальное в заданном диапазоне частот значение коэффициента передачи мощности от генератора в акустооптическую нагрузку. Приведен конкретный пример расчета согласующей цепи.