АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ACADEMY OF Science USSR

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

JOURNAL OF COMPUTATION MATHEMATICS AND MATHEMATICAL PHISICS

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

(copy)

"New algorithms for computing discrete Fourier transforms"

9

МОСКВА · 1986

Moscow · 1986

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 9

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.97:537.812

НОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

ГРИГОРЯН А. М.

(Ереван)

Предложены эффективные способы вычисления многомерного дискретного преобразования Фурье, основанные на его новом представлении.

В работе описывается новый общий подход к рассмотрению произвольного многомерного дискретного преобразования Фурье (м.д.п.Ф.), основная идея которого заключается в возможности однозначного представления каждой составляющей преобразования в виде соответствующего ей одномерного вектора. Такой подход позволяет осуществить независимые вычисления м.д.п.Ф. в каждой не пересекающейся с другими группе отсчетов, на которые определенным образом разбивается вся область определения спектра, что позволяет построить эффективные алгоритмы вычисления м.д.п.Ф. посредством минимального количества одномерных д.п.Ф.

Случай двумерного д.п.Ф. детально описывается, и соответствующие ему новые алгоритмы сравниваются с наиболее разработанными к настоящему времени алгоритмами вычисления двумерного д.п.Ф., основанными на факторизованном методе Кули – Тьюки [1], [2], на полиномиальных преобразованиях [3], а также на операции двумерной «бабочки» [4]. Как частный случай рассматривается соответствующий алгоритм и для одномерного преобразования Фурье.

§ 1. Векторное представление спектра м.д.п.Ф.

Рассмотрим произвольный массив $\{f_{k_1,\ldots,k_n}\}$ для n-мерного дискретного сигнала, размеры которого для простоты изложения будем считать равными, т. е. $1\leqslant k_i\leqslant N$, $i=1, 2, \ldots, n$, для некоторого целого числа N. Каждую спектральную составляющую в отсчете $(p_1, \ldots, p_n)$, где $p_i\in Z_N{}^1=1, 2, \ldots, N$, $i=1, 2, \ldots, n$, которая с точностью до нормировочного множителя равна

$$F_{p_1,\ldots,p_n}=\sum_{k_1=1}^{N}\cdots\sum_{k_n=1}^{N} f_{k_1,\ldots,k_n}W^{k_1p_1+\cdots+k_np_n}, \tag{1}$$

где $W=W_N=\exp(2\pi i/N)$, можно представить в виде N-мерного вектора

$$\overline{F}_{p_1,\ldots,p_n}=(f_{p_1,\ldots,p_n,1},\ldots,f_{p_1,\ldots,p_n,N}), \tag{2}$$

для которого

$$F_{p_1,\ldots,p_n}=\sum_{t=1}^{N} f_{p_1,\ldots,p_n,t}W^t.$$

Для этого нужно, как следует из (1), каждую компоненту вектора (2) вычислить суммированием значений исходного сигнала в отсчетах соответствующих множеств:

$$v_{p_1,\ldots,p_n,t}=\left\{(k_1,\ldots,k_n);\ 1\leqslant k_i\leqslant N, i=1, 2, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{n}k_ip_i=t \bmod N\right\}, \tag{3}$$

т. е.

$$f_{p_1,\ldots,p_n,t}=\sum_{v_{p_1,\ldots,p_n,t}} f_{k_1,\ldots,k_n}. \tag{4}$$

Очевидно, что при произвольном фиксированном значении отсчета $(p_1,\ldots,p_n)$ множества (3) для разных $t=1, 2,\ldots, N$ покрывают в совокупности всю область определения исходного сигнала $Z_N{}^n$, не пересекаясь, поэтому имеем

$$F_{\overline{kp_1},\ldots,\overline{kp_n}}=\sum_{t=1}^{N} f_{p_1,\ldots,p_n,t}W^{kt} \tag{5}$$

для любого целого k; здесь $\overline{kp_i}=(kp_i) \bmod N$. Из (5) следует, что преобразования Фурье над вектором (2), который соответствует спектральной составляющей в отсчете $(p_1,\ldots,p_n)$, определяют значения n-мерного спектра во всех отсчетах группы с образующей $(p_1,\ldots,p_n)$:

$$T_{p_1,\ldots,p_n}=\{(\overline{kp_1},\ldots,\overline{kp_n});\ k=1, 2,\ldots, N\}. \tag{6}$$

Выбирая минимальное число отсчетов спектра, соответствующие группы (6) которых в совокупности покрывали бы всю область определения $Z_N{}^n$ спектра, можно построить эффективный алгоритм вычисления n-мерного д.п.Ф. Следует отметить, что в частном случае, когда $n=1$, формула (5) вырождается в исходную (1) для нечетных отсчетов p $(T_p=Z_N{}^1)$ и поэтому не представляет большого интереса, но при любом $n>1$ она удобна при вычислении спектра. Ниже в качестве примера описывается случай, когда $n=2$.

§ 2. Алгоритм вычисления двумерного д. п. Ф.

Для спектра двумерного дискретизированного сигнала $\{f_{k_1,k_2}\}$, в силу (5), в произвольном отсчете (p_1, p_2) при целом k имеем

$$F_{\overline{kp_1},\overline{kp_2}}=\sum_{t=1}^{N} f_{p_1,p_2,t}W^{kt}. \tag{7}$$

Рассмотрим случаи, когда размер сигнала N – произвольное простое число или степень двойки. При N простом легко показать, что совокупность групп (6), соответствующая отсчетам множества $J_p=\{(1, 1), (1, 2),\ldots, (1, N), (N, 1)\}$, покрывает всю область $Z_N{}^2$ оптимально в том смысле, что все покрывающие в такой совокупности группы пересекаются между собой только в отсчете (N, N). В случае N, равного произвольной степени двойки, такого оптимального покрытия не существует. Действительно, легко убедиться, что в любой совокупности групп (6), покрывающих целиком область определения спектра, между некоторыми из них обязательно будут пересечения и в четных отсчетах. Более того, каждый такой отсчет принадлежит пересечению как минимум двух различных групп из такой совокупности, причем каждая покрывающая совокупность содержит не менее $3N/2$ групп (6), так как для степеней двойки N покрытие области определения спектра можно осуществить, например, совокупностью групп, соответствующих отсчетам множества $J_p=\{(1, 1), (1, 2),\ldots, (1, N), (2, 1), (4, 1), (6, 1),\ldots, (N, 1)\}$.

Таким образом, двумерное $(N\times N)$-точечное д.п.Ф. можно полностью вычислить по формуле (7) с помощью ровно $N+1$ или $3N/2$ одномерных N-точечных д.п.Ф. для N, равных произвольным простым числам или степеням двойки соответственно.

Такие алгоритмы более эффективны, чем известные алгоритмы из [1], [2], так как последние осуществляют преобразования Фурье сначала по всем строкам, а затем по столбцам полученного сигнала, т. е. выполняют $2N$ указанных преобразований. Отсюда следует, что предлагаемые алгоритмы выполняют в 2 или $^4/_3$ раза меньше операций умножения, если N простое или степень двойки соответственно. Далее, вычисление спектра в каждой группе (6) отсчетов выполняется по формуле (7) независимо от вычислений в других группах, поэтому большой дополнительной памяти для хранения промежуточных результатов в предлагаемых алгоритмах не требуется. Очевидно также, что при программной реализации такого алгоритма с помощью ЭВМ все обращения к памяти, где хранится исходный двумерный сигнал, можно осуществить только по строкам или столбцам.

Следует отметить, что аналогичный результат при N простом был получен и в редуцированном алгоритме [3] вычисления двумерного д.п.Ф. с помощью более сложных полиномиальных преобразований.

В случае N, равного произвольной степени 2, в таком алгоритме вычисление $(N\times N)$-точечного д.п.Ф. осуществляется с помощью полиномиальных преобразований и посредством не только $3N/2$ редуцированных N-точечных д.п.Ф., но еще и $(N/2\times N/2)$-точечного д.п.Ф., которое, в свою очередь, можно вычислить аналогичным образом посредством $3N/4$ редуцированных $N/2$-точечных д.п.Ф. и одного $(N/4\times N/4)$-точечного д.п.Ф., и т. д.

Предлагаемый алгоритм двумерного д.п.Ф. для степеней двойки N по числу операций комплексных умножений эффективнее также известных алгоритмов, использующих операцию двумерной бабочки (см., например, [4]), где требуется $\bar{v}_{N,N}=(N^2/4)(3\log_2 N-4)+1$ таких операций. Действительно, так как N-точечное д.п.Ф., осуществляемое алгоритмом б.п.Ф., требует $(N/2)(\log_2 N-3)+2$ нетривиальных комплексных операций умножения, то предлагаемый алгоритм вычисления двумерного д.п.Ф. требует аналогичных операций $v_{N,N}={}^3/_4N^2(\log_2 N-3)+3N$. Следовательно, для $N\geqslant 8$ имеем $\bar{v}_{N,N}-v_{N,N}={}^5/_4N^2-3N>0$.

Аналогичные выводы справедливы и для алгоритмов вычисления n-мерного д.п.Ф., основанных на (5) и в случае $n>2$. Как уже отмечалось, для N, равного степени двойки, группы (6), покрывающие в совокупности область определения спектра $Z_N{}^n$, определяют в своих пересечениях все четные отсчеты спектра, число которых равно $(N/2)^n$. В связи с этим существенного уменьшения операций умножения в таких отсчетах можно достичь исключением повторных вычислений м.д.п.Ф. по формуле (1.5).

Например, в двумерном случае такое улучшение описанного алгоритма сводится к тому, что $(N\times N)$-точечное д.п.Ф. вычисляется с помощью $3N/2$ неполных N-точечных д.п.Ф., что уменьшает количество операций умножения еще почти в 1.5 раза.

Ниже предлагается более экономичный алгоритм вычисления n-мерного д.п.Ф. для случая, когда N является произвольной степенью двойки.

§ 3. Спаренное представление спектра м. д. п. Ф.

Рассмотрим определенное в § 1 векторное представление произвольной составляющей спектра. Так как для всех $t\in\{1, 2, \ldots, N/2\}$ имеет место $W^t=-W^{t+N/2}$, то составляющую (1) в каждом отсчете $(p_1, \ldots, p_n)$ можно однозначно представить $N/2$-мерным вектором

$$\bar{F}'_{p_1,\ldots,p_n}=(f'_{p_1,\ldots,p_n,1}, \ldots, f'_{p_1,\ldots,p_n,N/2}), \tag{8}$$

в котором каждая компонента вычисляется из (4):

$$f'_{p_1,\ldots,p_n,t}=f_{p_1,\ldots,p_n,t}-f_{p_1,\ldots,p_n,t+N/2}, \tag{9}$$

где $t=1, 2, \ldots, N/2$, и для которого имеем

$$F_{p_1,\ldots,p_n}=\sum_{t=1}^{N/2} f'_{p_1,\ldots,p_n,t}W^t.$$

Более того, как следует из (5), для произвольного нечетного значения k имеет место

$$F_{\overline{kp_1},\ldots,\overline{kp_n}}=\sum_{t=1}^{N/2} f'_{p_1,\ldots,p_n,t}W_N^{kt}.$$

Раскрывая здесь экспоненциальные множители для нечетных значений $k=$ $=2m-1$, где m – любое целое, получаем

$$F_{\overline{kp_1},\ldots,\overline{kp_n}}=\sum_{t=1}^{N/2}(f'_{p_1,\ldots,p_n,t}W_N^{-t})W_{N/2}^{mt}. \tag{10}$$

Таким образом, осуществляя $N/2$-точечное преобразование Фурье над вектором

$$(11)\qquad \overline{G(F)}_{p_1,\ldots,p_n} = (f'_{p_1,\ldots,p_n,1}W_N^{-1},\ldots,f'_{p_1,\ldots,p_n,N/2}W_N^{-N/2}),$$

получаем все значения спектра сигнала в отсчетах, составляющих нечетную половину соответствующей группы (6):

$$(12)\qquad T'_{p_1,\ldots,p_n} = \{(\overline{(2m-1)\,p_1},\ldots,\overline{(2m-1)\,p_n});\ m=1,2,\ldots,N/2\}.$$

Например, для отсчета $(1,\ldots,1)$ по компонентам вектора $\overline{G(F)}_{1,\ldots,1}$ преобразованием Фурье определяются спектральные составляющие в отсчетах $(1,\ldots,1)$, $(3,\ldots,3)$, $(N-1,\ldots,N-1)$.

Используя формулу (10), построим алгоритм вычисления полного n-мерного д.п.Ф. Как и в алгоритмах, основанных на способе вычисления д.п.Ф. по (5), очевидно, нужно выбрать минимальное число отсчетов, соответствующие множества (12) которых покрывали бы в совокупности всю область $Z_N{}^n$ определения спектра.

В отличие от описанного в § 1 способа вычисления м.д.п.Ф., этот способ вычисления, основанный на представлении каждой составляющей спектра в виде (8), которое назовем спаренным векторным представлением, делает возможным покрытие области определения спектра для N, равных степеням двойки, оптимальным образом, т. е. так, чтобы выполнялись условия

$$(13)\qquad Z_N^n = \bigcup_J T'_{p_1,\ldots,p_n},\qquad T'_{p_1,\ldots,p_n}\cap T'_{g_1,\ldots,g_n}=\varnothing,$$

где объединение осуществляется по отсчетам некоторого подмножества J в $Z_N{}^n$, а условие непересечения выполняется для любых разных элементов из этого множества.

Покажем это на примерах двумерного и одномерного д.п.Ф., соответствующие алгоритмы для которых описываются ниже. Более общие случаи м.д.п.Ф. рассматриваются аналогичным образом.

§ 4. Спаренный алгоритм вычисления двумерного д. п. Ф.

Рассматривая двумерный случай, множество J в (13) возьмем равным

$$(14)\qquad J^2 = J_N \cup 2J_{N/2} \cup 4J_{N/4} \cup \ldots \cup NJ_1,$$

где $kJ_{N/k} = \{(kp_1,\ kp_2);\ (p_1,\ p_2)\in J_{N/k}\}$ для всех $k=2^r$, $r=0,\ 1,\ldots,\ \log_2 N$, а $J_{N/k}$ — определенные выше множества $\{(1,\ p_2);\ p_2=1,\ 2,\ldots,\ N/k\}\cup\{(2p,\ 1);\ p_1=1,\ 2,\ldots,N/(2k)\}$ для всех степеней двойки k от 1 до $N/2$; для $k=N$ имеем $J_1=\{1,\ 1\}$. Легко показать, что в множестве (14) при $k_1\neq k_2$ будет $J_{N/k_1}\cap J_{N/k_2}\neq\varnothing$, и J^2 поэтому удовлетворяет условиям оптимальности (13) покрытия области определения спектра. Далее, мощности множества (12) в (13) при таком J равны $\operatorname{card} T'_{p_1,p_2}=0.5N/2^r$, если $(p_1,\ p_2)\in 2^r J_{N/2^r}$, где $r=0,\ 1,\ldots,\log_2 N$, а для множеств в (14) имеем $\operatorname{card} J_{N/2^r}=1.5N/2^r$. Поэтому из (14) легко следует, что $\operatorname{card} J^2=3N-2$.

Таким образом, в оптимальном покрытии (13), объединяющем $3N-2$ множеств (12), $3N/2$ из них содержат по $N/2$ элементов каждый, $3N/4$ — по $N/4$ элементов, и т. д. Поэтому для определения полного спектра двумерного сигнала с размерами $N\times N$ достаточно выполнить $3N/2$ одномерных $N/2$-точечных д.п.Ф. или $3N/4$ одномерных $N/4$-точечных д.п.Ф., и т. д.

Действительно, пусть произвольный элемент $(p_1,\ p_2)$ из J^2 принадлежит множеству $2^r J_{N/2^r}$ для некоторого $r\in[0,\ \log_2 N]$, т. е. НОД $(p_1,\ p_2)=2^r$. В силу определений (3), (4) и (9), очевидно, что в соответствующем векторе $\overline{G(F)}_{p_1,\ p_2}$ все компоненты с номерами, не кратными числу 2^r, равны нулю. Поэтому такому вектору можно однозначно сопоставить $N/2^{r+1}$-мерный вектор $\overline{G(F)}{}^{g}_{p_1,\ p_2}=(g_{p_1,\ p_2,\ 1},\ g_{p_1,\ p_2,\ 2},\ldots,g_{p_1,\ p_2,\ N/2^{r+1}})$, в котором компоненты $g_{p_1,p_2,t}=f'_{p_1,p_2,2^r t}W^{-t}_{N/2^r}$ для всех $t=1-N/2^{r+1}$. При этом для произвольных значений m имеет место равенство

$$(15)\qquad \sum_{t=1}^{\overline{\overline{N/2}}}(f'_{p_1,p_2,t}W_N^{-t})\,W_{N/2}^{mt} = \sum_{t=1}^{N/2^{r+1}} g_{p_1,p_2,t}\ W^{mt}_{N/2^{r+1}}.$$

Поэтому $N/2$-точечное д.п.Ф. вектора F'_{p_1,p_2} для произвольного отсчета $(p_1, p_2)\in \in 2^r J_{N/2^r}$, где $r\in\{0, 1,\ldots, \log_2 N\}$, эквивалентно выполнению $N/2^{r+1}$-точечного д.п.Ф. над соответствующим вектором $\overline{G(F)}^r_{p_1, r_2}$. Отсюда и следует, что результаты $3N-2$ одномерных д.п.Ф. порядка $N/2$, достаточных для вычисления полного двумерного д.п.Ф. предлагаемым алгоритмом с формулой (10), эквивалентны в совокупности результатам выполнений указанных д.п.Ф.: $3N/2$ порядка $N/2$-точечных, $3N/4$ порядка $N/4$-точечных и т. д.

Подсчитаем объем $v'_{N,N}$ нетривиальных операций умножения на поворачивающие экспоненциальные множители, необходимый для выполнения предлагаемого алгоритма вычисления $(N\times N)$-точечного д.п.Ф. Если через v_M (при произвольной степени двойки M) обозначить объем таких операций для M-точечного д.п.Ф., то, очевидно, из (10) и (15) получим

(16)
$$v'_{N,N}=(3N/2)(v_{N/2}+N/2-2)+(3N/4)(v_{N/4}+N/4-2)+\ldots$$
$$\ldots+3\cdot 2(v_2+2-2)=3N\sum_{r=1}^{\log_2 N-2}2^{-r}v_{N/2^r}+N^2-6N+8.$$

Такая формула оценки объема нетривиальных операций умножения, необходимых при вычислении двумерного д.п.Ф. с помощью одномерных, в силу оптимальности покрытия (13) является точной, т. е. неулучшаемой. Поэтому при наличии минимальных оценок таких операций для одномерных д.п.Ф. можно с помощью (16) определить минимальное число комплексных умножений и для двумерного д.п.Ф. Если оценивать все $v_{N/2^r}$ с помощью одномерных алгоритмов из [1], [2], для которых они равны, как уже отмечалось, $(N/2^{r+1})[\log_2(N/2^r)-3]+2$, то нетрудно получить, что

$$v'_{N,N}=\frac{N^2}{2}\Big(\log_2 N-\sum_{r=1}^{\log_2 N-2}\frac{r}{4^r}-1\Big)-8(\log_2 N-1),$$

откуда следует, что для $N>8$

(17)
$$v'_{N,N}\approx(N^2/2)(\log_2 N-{}^5/_2)-8(\log_2 N-1).$$

При сравнении с описанным в § 1 алгоритмом с формулой вычисления (5), выполняющим $3N/2$ одномерных N-точечных д.п.Ф. посредством $v_{N,N}=(3N/2)v_N$ операций умножения, получаем, что $v_{N,N}>1.5v'_{N,N}$. Таким образом, по количеству операций умножения описанный здесь алгоритм, который назовем спаренным, эффективнее алгоритма в § 1 более чем в полтора раза.

§ 5. Алгоритм одномерного д. п. Ф.

Рассмотрим случай $n=1$, соответствующий одномерному преобразованию Фурье. Множество J в (13), по которому следует построить алгоритм, основанный на спаренном представлении спектра, очевидно, можно взять равным $J^1=\{1, 2, 4, 8,\ldots,N\}$ с мощностью $\log_2 N+1$. Такое множество представляет собой проекцию множества J^2, определенного выше, на одномерную область Z_N^1. При этом $T_1'=\{1, 3,\ldots, N-1\},\ldots$ $\ldots, T_m'=\{m, 3m,\ldots, N-m\}$ для $m=2^r$, $r=1, 2,\ldots, \log_2 N-1$, и $T_N'=\{N\}$.

Аналогично случаю $n=2$, получаем, что для вычисления N-точечного д.п.Ф. достаточно выполнить одно $N/2$-точечное д.п.Ф. над вектором $\overline{G(F)}_1{}^0$, одно $N/4$-точечное над вектором $\overline{G(F)}_2{}^1$ и т. д. и одно $N/2^r$-точечное д.п.Ф. над вектором $\overline{G(F)}^{r+1}_{2^r}$, где $r=1, 2,\ldots, \log_2 N-1$; здесь

$$\overline{G(F)}^{r+1}_{2^r}=(f'_{2^r,1}W^{-1}_{N/2^r}, f'_{2^r,2}W^{-2}_{N/2^r},\ldots, f'_{2^r,N/2^r}W^{-N/2^{r+1}}_{N/2^r}).$$

При этом их компоненты легко вычисляются; например, для $r=0, 1$ имеем $f'_{1,t}= =f_t-f_{t+N/2}$, $t=1, 2,\ldots, N/2$, $f'_{2,t}=f_t+f_{t+N/2}-f_{t+3N/4}-f_{t+N/4}$, $t=1, 2,\ldots, N/4$. Следовательно, объем нетривиальных операций умножения в таком алгоритме вычисляется по следующей рекуррентной формуле при $N>8$:

$$v_N'=(v'_{N/2}+N/2-2)+(v'_{N/4}+N/4-2)+\ldots+(v_8'+6)+v_8';$$

отсюда следует оценка для умножений:

$$v_N' = 2v'_{N/2} + N/2 - 2 = (N/2)(\log_2 N - 3) + 2.$$

Таким образом, получена такая же оценка операций умножения, как и в алгоритмах из [1], [2], которая и использовалась выше при выводе оценки (17) для двумерного д.п.Ф.

Следует отметить, что описанный способ вычисления одномерного д.п.Ф., основанный на спаренном представлении последнего, позволяет строить алгоритмы вычисления д.п.Ф. с помощью минимального количества таких же преобразований, но меньших порядков и для любых порядков, являющихся четными числами. Действительно, существование необходимого для этой цели оптимального покрытия области определения спектра множествами вида (12) для произвольного четного порядка N доказывается простыми построениями соответствующих множеств J в (13). А такое множество J для произвольного четного N можно взять равным $J=\{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^r\}$, где 2^r — наибольшая степень двойки, являющаяся делителем числа N. Ясно, что в самом общем случае $n>2$ для вычисления n-мерного д.п.Ф. способом, основанным на спаренном представлении преобразования, алгоритмы, использующие минимальное количество одномерных д.п.Ф., строятся аналогично рассмотренным выше случаям $n=1$, 2, причем для любых порядков, у которых хотя бы одна размерность является четным числом.

В заключение следует отметить, что при соответствующей организации процедуры выполнения спаренного представления нужных спектральных составляющих сигнала с помощью специализированных вычислителей можно реализовать процесс вычисления м.д.п.Ф. во времени, близком к времени выполнения $N/2$-точечного д.п.Ф. Действительно, процесс вычисления полного м.д.п.Ф. указанными алгоритмами разбивается на независимые процедуры вычисления спектра преобразования для каждой непересекающейся группы отсчетов, которые в совокупности определяют всю область определения спектра, а максимальный порядок одномерного д.п.Ф., посредством которого определяются значения исходного спектра в каждой такой группе, равен $N/2$.

Литература

1. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
2. *Ярославский Л. П.* Введение в цифровую обработку изображений. М.: Сов. радио, 1979.
3. *Нуссбаумер Г. Дж.* Вычисление двумерных сверток и дискретных преобразований Фурье.— В кн.: Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений. М.: Радио и связь, 1984, с. 43–88.
4. *Середа Л. А.* Алгоритм быстрого вычисления двумерного дискретного преобразования Фурье.— Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1983, т. 26, № 7, с. 18–22.

Поступила в редакцию 19.IX.1984
Переработанный вариант 25.II.1986

УДК 517.958:537.812

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

АПЕЛЬЦИН В. Ф., ИЛЬИНСКИЙ А. С., САБИТОВ Б. Р.

(Москва)

Предложен способ аппроксимации векторного поля специальной системой конечных элементов, удобной для обоснования неполного проекционного метода построения приближенного решения векторных задач рассеяния на диэлектрических телах.

Исследование задачи электромагнитного рассеяния на прозрачном теле требует построения решения системы уравнений Максвелла в стационарном случае

(1) $\quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}$